多項式に帰着する整函数 (解析多様体に関する研究)

西野, 利雄

数理解析研究所講究録
207巻 1974年 11-31

多項式に帰着する整函数

京大 理　西 野 利 雄

1. 2変数 x, y の整函数全体を class (E) とする。class (E) の函数を，それの prime surface の Riemann 面としての性質により次のように分類する。すなわち，すべての prime surface が 0 境界をもつような函数の全体を class (P) とし，すべての prime surface が compact Riemann 面より有限個の点を除いたものに analytic equivalent であるような函数の全体を class (A) とする。このとき

$$\text{class}(A) \subsetneqq \text{class}(P) \subsetneqq \text{class}(E)$$

が成立する。

f を class (A) の函数とすると，f は (B) 型の irregular prime surface を持たず，かつ有限個の例外を除けば，他のすべての f の prime surface は同一の genus と同一個数の境界点をもつ．[1]

ところで $P(x, y)$ を2変数の polynome, $(\xi(x,y), \eta(x,y))$ を $\mathbb{C}^2$ の analytic automorphisme, $F(z)$ を1変数の整函数とすると，函数

$$f(x,y) = F[P(\xi(x,y), \eta(x,y))]$$

は常に class (A) に属する．逆に class (A) の函数 f が，上のように書けるとき，f は polynome に帰着すると云おう．我々の目的は，class (A) の函数はすべて polynome に帰着することを示すことである．

1971年，小平氏は $\mathbb{C}^2$ と analytic equivalent な部分 W を含む2次元の compact complex manifold M は，それの1次元 betti 数 b_1 が 0 である限り rational であることを示した．[2]．$b_1 = 0$ という条件は，もし $T = M - W$ が compact subvariety ならば当然成立する．このような場合，M を $\mathbb{C}^2$ の compactification と呼ぶ．次いで1972年，Morrow 氏は $\mathbb{C}^2$ の compactification M に対して，ある種の極小條件を設定して，その場合の T の構造を明らかにした．[3]．これは $\mathbb{C}^2$ の compactification が常に rational になることを示しているばかりでなく，更に M は birational にかつ W では biregular に $\mathbb{P}^2$ に対応することを示している．このとき T の image は，当然 $\mathbb{P}^2$ の complex line である．

そこで次のような問題を提起する。

f を class (A) の函数とする。それに対し，ある $\mathbb{C}^2$ の compactification M と，$\mathbb{C}^2$ より M への analytic homeomorphism ς とを求めて，M での1価正則な函数 $f^* = f\cdot\varsigma$ を考えるとき，f^* の任意の定数面の各 irreducible component の M に於ける closure が M の compact subvariety になるようにすること。

このような M と M と ς の組 (M, M, ς) を f の algebric model と呼ぼう。Morrow の結果より直ちにわかるように，もし class (A) の任意の函数に対して，それの algebric model が作れるならば，我々の主問題は解決する。

2. V を2次元の analytic space とする。いま V から ある Riemann 面 R への analytic map p が与えられて居り，R の任意の点 α に対して，$p^{-1}(\alpha)$ が1次元の analytic subvariety になっているとき，組 (V, p, R) または誤解の生じない限り V を，R 上の curve の holomorphic family または単に curve の family と呼ぶ。そして p を V から R への projection，$p^{-1}(\alpha)$ を V の α 上の fiber と云い，$p^{-1}(\alpha)$ を V_α と書く。特に V の fiber V_α がすべて connected な compact analytic subvariety にな

るときには，compact curve の family と云い，また V が Stein manifold のときは curve の Stein family または単に Stein family と云う．V が R 上の compact curve の family ならば，R に或る孤立点の集合 e があって，e 以外の R の点 α に対して，V_α は non singular, irreducible, order 1 となる．このとき，この V_α の genus はすべて等しい．e の点を V の critical value，e の点 β に対して，V_β を V の critical fiber，e 以外の点 α に対して V_α を V の general fiber，そして V の general fiber の genus を V の genus と云う．V が Stein family のときは勿論このように単純ではない．V を R 上の curve の family とする．いま R 上の領域 δ と，δ から V への analytic map η があり，δ の任意の点 α に対して，$p(\eta(\alpha)) = \alpha$ であるとき，η を V の δ 上の analytic section と云う．また V と W を二つの curve の family とし，ς を V から W への map としたとき，ς によって V の fiber が W の fiber に写像されるなら，ς を fiber transformation と云う．特に V と W が同じ Riemann 面 R 上の curve の family で W は compact curve の family，ς は into homeomorphic で，しかも R の任意の点 α に対し，V_α を W_α に写像するとき，W を V の fiber compactification と云う．このときは V と $\varsigma(V)$ を

identify して $V \subset W$ とみなす．また V を R 上の curve の family，R' を1つの Riemann 面，そして ξ を R' から R への analytic map とする．このとき R' 上の curve の family V' で，それが V の自然な逆像になっているものが作れる．これを V の ξ による pull-back と云う．ξ による V' より V への fiber transformation を同じ ξ で表わす．

一般に M を2次元の analytic space，S を M の1次元の analytic subvariety とする．もし S が abstract Riemann 面としては compact Riemann 面 $\hat{S}$ から有限個の点を除いたものであるとき，S を algebric と云う．そして $\hat{S}-S$ の点を S の境界点と云い，$\hat{S}$ の genus が g，S の境界点の個数が n のとき，S は type (g, n) であると云う．また S を V の algebric subvariety とし，φ を S の近傍で meromorphic な函数とするとき，φ の S への restriction が，$\hat{S}$ で高々 meromorphic になるとき φ は S 上 algebric であると云う．

さて，(V, p, R) を1つの Stein family とし，次の条件を満たすとする．

条件(A)．R の任意の点 α に対し，V の α 上の fiber V_α は，irreducible，algebric で，同一の type (g, n) を持つ．

このとき V は type (g, n) であるという．V の任意の fiber は non singular，irreducible，order 1 になる．

しかも R の任意の点 α_0 に対し α_0 の適当な近傍 δ をとれば，$p^{-1}(\alpha)$ で meromorphic で，かつ δ の任意の点 α に対して V_α 上 non constant，algebric な函数を作ることができる．このことより我々は次の定理を得る．

Theorem 1. V を R 上の curve の Stein family とする．もし V が條件 (A) を満たせば，V の fiber compactification $\hat{V}$ が存在する．

なおこのとき，Hartogs の定理より，$T=\hat{V}-V$ は $\hat{V}$ の analytic subvariety になる．したがって T は $\hat{V}$ の R 上の多価な analytic section η を与える．

3. $f(x,y)$ を class (A) の函数で primitive とする．f によって C^2 は C^1 上の curve の Stein family とみられる．しかも C^2 から f の critical surface を除いた部分は Stein family として條件 (A) を満たす．それで f の algbric model を作るためには次の２つの問題を解けばよい．

$\mathcal{D}$ を Z 平面の円 $|z|<\rho$ とし，$\mathcal{D}'=\mathcal{D}-\{0\}$ とする．

"$(V', p, \mathcal{D}')$ を curve の Stein family とし，條件 (A) も満たすとする．このとき，$\mathcal{D}$ 上の compact curve の family $\tilde{V}$ で，$\tilde{V}-V_0'$ は V' の fiber compactification であ

り，かつ $\hat{V}-V'$ は $\hat{V}$ の analytic subvariety になるものを求めること．"

"(V,p,D) を curve の Stein family とし，$V'=V-V_0$ は条件（A）を満たし，かつ V_0 は有限個の irreducible component よりなるとする．このとき V の fiber compactification $\hat{V}$ で，$\hat{V}-V$ が $\hat{V}$ の analytic subvariety になるものを求めること．"

この第2の問題で，V_0 が有限個の irreducible component よりなると云う条件は不可欠である．同様の理由で，たとえ V' が type $(0,1)$ であったとしても，整函数のときのように，V_0 が irreducible になるとは限らない．

この節では，V' の type を $(0,n)$ として，この2つの問題を解く．

1）(V',p,D') を条件（A）を満たす type $(0,n)$ の Stein family とする．定理Iより V' の fiber compactification $\tilde{V}'$ が存在する．$S=\tilde{V}'-V'$ とする．S の connected component を S_j; $(j=1\cdots p)$，S_j の D' 上の枚数を m_j，m_j $(j=1\cdots p)$ の最小公倍数を m とし，t 平面上の円 E: $|t|<\rho^{\frac{1}{m}}$ より D 上への analytic map ξ: $z=t^m$ を考える．そうすると，$E'=E-\{0\}$ として，E' 上に ξ による $\tilde{V}'$ の pull-back $\tilde{W}'$ が得られる．このとき S の ξ による逆像 T

は，E'上単葉なn個の connected component T_ν ($\nu=1\cdots n$) に分かれる．そこで$\tilde{W}'$上でT_1でのみ1位の pole をもつ1価 meromorphic な函数$\tilde{\varphi}$を作る．このような函数は確かに存在する．そして写像$w=\tilde{\varphi}$によって，$\tilde{W}'$を$E'\times P'$と実現できる．このときT_ν ($\nu=2\cdots n$) は$w=\varsigma_\nu(t)$と表わせるが，もし存在するなら，$\varsigma_2\equiv 0$，$\varsigma_3\equiv 1$としておく．そうすると Picard の定理より$\varsigma_\nu(t)$ ($\nu=4\cdots n$) は，存在する限り，$t=0$で高々 pole である．

さて，もし$m=1$ならば，$\tilde{W}'=\tilde{V}'$であるから，$E\times P'$が確かに求める$\tilde{V}$である．それで$m\geqq 2$とする．$\tilde{W}'$をςによって$\tilde{V}'$上の covering とみなし，$\tilde{W}$の covering transformation をς_μ ($\mu=1\cdots m-1$) とする．ς_μは$t'=e^{2\pi i\mu/m}t$，$w'=\psi_\mu(wt)$と表わされる．このとき明らかにTはς_μによって invariant である．したがってもし$n\geqq 3$ならς_μは$E\times P'$で高々 meromorphic である．また$n=2$なら$\varsigma_1=e^{\alpha(t)}/w$と書ける．ここで$\alpha(t)$は$E'$で1価正則である．このときは座標変換$w'=e^{-\frac{1}{2}\alpha(t)}\cdot w$をほどこすと$\psi_1=1/w'$となるから，やはり$E\times P'$で高々 meromorphic とできる．そこで$\varphi=w+\Sigma\psi_\mu$とする．$\varphi$は$\tilde{V}'$上の1価函数になる．そして写像$u=\varphi$で$\tilde{V}'$は$D'\times P'$上の多様域として実現される．これは容易に$D\times P'$上相対境界のない多様域に拡張できる．これ

が求める $\tilde{V}$ である．したがって type $(0, n)$ のとき才1問題は確かに解ける．

2） 次に (V, p, D) を才2問題の条件を満たす type $(0, n)$ の Stein family とする．この問題は，必要なら十分小さい円 $D^*: |z| < \rho^*$ $(\rho^* < \rho)$ を考えて，$p^{-1}(D^*)$ で解きさえすればよい．また V より，V の D 上の analytic section の像で共通点を持たぬものを有限個除き去ったものを V^* とするとき，V^* に対する才2問題の解は，また V に対する才2問題の解にもなっている．それで $n \geqq 3$ と仮定しても一般性を失わない．さて $V' = V - V_0$ とし，V' に対する才1問題の解を $\tilde{V}$ とする．そして V' の $\tilde{V}$ への canonical な写像を φ とする．このとき D 内の $z = 0$ の任意の近傍 δ と，V の δ 上の任意の analytic section η に対し，$\tilde{V}$ の $\delta - \{0\}$ 上の analytic section $\eta^* = \varphi \circ \eta$ が定義されるが，上の仮定より η^* は $\tilde{V}$ の δ 上の analytic section に解析接続される．したがって写像 φ は V から $\tilde{V}$ への bimeromorphic な写像に拡張される．そうすれば，$\tilde{V}$ を変形して φ が biregular になるようにできる．これが求める $\hat{V}$ である．したがって type $(0, n)$ のとき，才2問題も確かに解ける．

4．この節では，前節で提起された二つの問題を $g = 1$ の

ときに解決する．よく知られているように，genus 1 の compact curve の family，すなわち elliptic family については，小平氏の詳細な研究がある〔4〕．ここでは，その理論を次のように応用する．$(V', p, \mathscr{D}')$ を条件 (A) を満たす type $(1, n)$ の Stein family とし，$\tilde{V}'$ を V' の fiber compactification とする．$\mathscr{D}'$ の点 Z に対し，$\tilde{V}'_Z$ の基本 cycle C_Z, D_Z を Z に関して連続的に動くように取り，$\tilde{V}'_Z$ の第一種微分 w_Z を Z に関して analytic に動くように作る．そうすると w_Z の C_Z および D_Z に関する period の比により，$\mathscr{D}'$ より上半平面 $\mathscr{H}$ への analytic map $\pi(Z)$ が得られる．$\pi(Z)$ は一般に $\mathscr{D}'$ 上の多価函数になり，Z が原点の周りを一周すると，$\mathscr{H}$ の modular 変換群 Δ の element Γ による変換を受ける．したがって $\mathscr{H}$ に於ける elliptic modular function を $J(u)$ として，$\tilde{\pi}(Z) = J(\pi(Z))$ とすると，$\tilde{\pi}(Z)$ は $\mathscr{D}'$ 上1価正則になるが，これは $Z=0$ で高々 meromorphic である．この $\pi(Z)$ を $\tilde{V}'$ の chacteristic，Γ を $\tilde{V}'$ の monodoromy と云う．

そこで $S = \tilde{V}' - V'$ とし，S の connected component を $S^{(j)}$ $(j = 1 \cdots p)$ とし，$S^{(1)}$ の $\mathscr{D}'$ 上の枚数を m とする．そしてt平面上の円 E: $|t| < \rho^{1/m}$ より $\mathscr{D}$ への写像 ξ: $Z = t^m$ による $\tilde{V}'$ の pull-back を $\tilde{W}$，S の ξ による逆像を T，T の connected component を $T^{(\nu)}$ $(\nu=1\cdots\delta)$ とし，その内 $S^{(1)}$ に対応するものを $T^{(1)}$ とする．$T^{(1)}$ は E' 上単葉である．ところで $\widetilde{W}'$ の characteristic は $\pi^*(t)=\pi(t^m)$，$\widetilde{W}'$ の monodoromy は $\Gamma^*=\Gamma^m$ である．そこでこの $\pi^*(t)$ と Γ^* とで E 上の elliptic family $\widetilde{W}$ を作る．このとき $\widetilde{W}$ は，$T^{(1)}$ が $\widetilde{W}$ の E 上の analytic section を与えるように $\widetilde{W}$ を含んでいるとしてよい．そうすると Picard の定理より容易にわかるように，$T^{(\nu)}$ $(\nu=2\cdots\delta)$ の $\widetilde{W}$ に於けるclosure は，すべて $\widetilde{W}$ の analytic subvariety になる．ところで $\mathcal{D}$ の analytic automorphism η_μ : $t'=e^{2\pi i\mu/m}\cdot t$ $(\mu=0,1,\cdots,m-1)$ を考えるとき，$\pi^*(\eta_\mu(t))=\pi^*(t)$ となる．したがって η_μ は $\widetilde{W}$ の analytic automorphism $\tilde{\eta}_\mu$ を引き起こす．

そこで $\widetilde{W}$ を，この $\tilde{\eta}_\mu$ $(\mu=0,1,\cdots,m-1)$ の作る群で割ったものを $\widetilde{V}$ とすると，これが求める compact curve の family である．よって $g=1$ のとき，第1問題は確かに解ける．

第1問題が解けるならば，第2問題は type $(0,n)$ のときとほとんど同様の方法で解決される．たゞ次の事も注意すればよい．すなわち，

$\widetilde{V}$ を $\mathcal{D}$ 上の elliptic family とし，$\widetilde{V}$ の critical fiber は $\widetilde{V}_0$ のみとする．そして ζ を $\mathcal{D}$ 上の analytic section とする．いま領域 δ : $0<|z|<\rho'$ $(\rho'<\rho)$ 上の $\widetilde{V}$ の analytic section η が与えられたとき，もし δ の各点に対して，ちき η となるならば，η は $z=0$ でも analytic な section に拡張できる．

このことは；Picard の定理と小平氏の elliptic family の作り方より容易に証明できる．

5．最後に $g \geqq 2$ のときを考察する．一般に z 平面上の円 $\mathcal{D}$: $|z|<\rho$ に対し，$\mathcal{D}$ 上の genus g $(g \geqq 2)$ の compact curve の family $\tilde{V}$ を考える．いま $\tilde{V}$ の critical fiber が $\tilde{V}_0$ のみのとき，$\tilde{V}$ を $\mathcal{D}$ 上の degenerating family と云う．degenerating family について，最近いくつかの研究がある．(例えば [5] をみよ)．ここではそれらの理論を応用する．$\mathcal{H}_g$ を Siegel の上半平面，Δ_g を $\mathcal{H}_g$ の symplectic group，$\gamma_g = \mathcal{H}_g / \Delta_g$，そして $\tilde{\gamma}_g$ を γ_g の佐武氏の意味の compactification とする．そうすると genus g の curve の moduli 空間 $\mathfrak{M}_g$ は，γ_g の中の local closed な analytic set をなす．そして $\widetilde{\mathfrak{M}}_g$ を $\mathfrak{M}_g$ の $\tilde{\gamma}_g$ に於ける closure とすると，$\hat{\gamma}_g$ も $\widehat{\mathfrak{M}}_g$ も共に projective algebraic である．そこで $\tilde{V}' = \tilde{V} - \tilde{V}_0$ とし，$g=1$ のときと同様に，$\mathcal{D}'$ の任意の点 z に対し $\tilde{V}_z'$ の基本 cycle (C_z, D_z) と (C_z, D_z) に対して normalize した第一種微分の base を使って，$\mathcal{D}'$ より $\mathcal{H}_g$ への analytic map

$\pi(z)$と，zが原点の周りを一周したとき$\pi(z)$が受ける変換Γ ($\Gamma<\Delta_g$) を定める．この$\pi(z)$およびΓもまた$\tilde{V}'$のcharacteristicおよび$\tilde{V}'$のmonodoromyと呼ぶ．このとき，$\mathcal{H}_g$より$\mathcal{S}_g$へのcanonical projectionをJとし，$\tilde{\pi}(z)=J(\pi(z))$とすると，$\tilde{\pi}(z)$は$\mathcal{D}'$より$\mathcal{S}_g$への1価なanalytic mapになるが，これを$\tilde{\mathcal{S}}_g$へのanalytic mapとみるならば，$z=0$でもanalyticに接続される．[6]．

ここで次のような概念を導入する[7]．一般にRをあるRiemann面，$\tilde{W}$をR上のcompact curveのfamilyとする．いま$\tilde{W}$が次の条件を満たすならば，$\tilde{W}$をstable curveのfamilyと云う．

i) $\tilde{W}$の各fiber $\tilde{W}_\alpha$は高々double ordinaryなsingular pointしか持たず，かつ$\tilde{W}_\alpha$の各irreducible componentはorder 1である．

ii) $\tilde{W}_\alpha$のirreducible componentでnon singular rationalなものは，少くとも3点で他のcomponentと交わる．

このとき，次のことが云える．

$\tilde{V}$を$\mathcal{D}$上のdegenerating familyとする．$\tilde{V}_0$のirreducible componentを$\tilde{V}_0^{(j)}$ $(j=1,\cdots p)$，$\tilde{V}_0^{(j)}$のorderをm_j，m_j $(j=1\cdots p)$の最小公倍数をmとし，t平面上の円E：

$|t|<\rho^{1/m}$ より $\mathcal{D}$ への analytic map $\xi: z=t^m$ による $\tilde{V}$ の pull-back を $\tilde{V}^*$ とする。このとき E 上の stable curve の family $\tilde{W}$ で、$\tilde{V}^*$ と bimeromorphic equivalent なものが存在する。

さて、上のような条件を満たす curve C を stable curve と呼び、$\dim H^1(C, \mathcal{O})$ を C の genus とするとき、genus g の stable curve 全体の moduli 空間 $\tilde{\mathfrak{M}}$ が定義できて、これも projective algebraic になる。$\tilde{\mathfrak{M}}$ は自然に $\mathfrak{M}$ を含むから、$\hat{\mathfrak{M}}$ と $\tilde{\mathfrak{M}}$ は birational equivalent である。ところが $\tilde{\mathfrak{M}}$ のある有限葉の covering $\mathfrak{N}$ をとり、$\mathfrak{N}$ より $\tilde{\mathfrak{M}}$ への canonical projection を p とするとき、$\mathfrak{N}$ 上の stable curve の holomorphic family $\mathfrak{F}$ で $\mathfrak{N}$ の任意の点 α に対し、$\mathfrak{F}$ の α 上の fiber の moduli が $p(\alpha)$ になるようなものが存在する。[8]

そこであらためて $(V', p, \mathcal{D}')$ を条件 (A) を満たす type (g, n) $(g \geqq 2)$ の Stein family とし、$\tilde{V}$ を V' の fiber compactification とする。そして degenerating family のときと同様にして、$\tilde{V}'$ の characteristic $\pi(z)$ と $\tilde{V}'$ の monodoromy Γ を定める。そして $\hat{\pi}(z) = J(\pi(z))$ とすると、これは $\mathcal{D}'$ より $\hat{\mathfrak{M}}$ への analytic map と考えられるが、これもまた $z=0$ でも analytic に拡張できる。したがって上のことより、正の整数 m を適当にとり、t 平面上の円 E : $|t|<\rho^{1/m}$

より $\mathfrak{D}$ への analytic map $\xi: z = t^m$ を考えるとき，E 上の stable curve の family $\widetilde{W}$ で E の任意の点 t に対し，$\widetilde{W}_t$ の moduli が $\widetilde{\pi}(\xi(t))$ となるものが存在する．

ここに次の定理がある．

Theorem 2. $\mathfrak{D}$ を z 平面上の円 $|z|<\rho$，$\widetilde{W}$ を $\mathfrak{D}$ 上の stable curve の family で，critical fiber は $\widetilde{W}_0$ のみとする．このとき領域 $\delta: 0<|z|<\rho'$ $(\rho'<\rho)$ 上の $\widetilde{W}$ の analytic section は，$z=0$ でも analytic な section に拡張できる．

もしこの定理の証明ができたならば，前々節の問題は $g=1$ のときと全く同様に $g \geqq 2$ のときも解決する．

6. この節では前節の定理の概要を述べる．あらためて $\mathfrak{D}$ を z 平面上の単位円：$|z|<1$ とし，V を $\mathfrak{D}$ 上の stable curve の family，$\eta(z)$ を領域 $\delta: 0<|z|<\rho^0$ 上の V の analytic section とする．$\mathfrak{D}$ の点 z 上の V の fiber をここでは S_z とし，V の critical fiber S_0 の irreducible component を $S_0^{(j)}$ $(j=1\cdots p)$，$S_0^{(j)}$ から S_0 の singular point をすべて除いたものを $s_0^{(j)}$ とする．仮定より $s_0^{(j)}$ の universal covering space $\tilde{s}_0^{(j)}$ はすべて hyperbolic である．さて，もし $\eta(z)$ が $z=0$ へ analytic に拡張されないなら，その image はどれかの $s_0^{(j)}$ 全体に集積する．それでいま δ 内に

原点に収斂する点 a_ν ($\nu=1,2\cdots$) で，$\eta(a_\nu)$ ($\nu=1,2,\cdots$) は S_0 の regular point P に収斂するものがあると仮定する．このとき $\eta(z)$ は $z\to 0$ のとき P に収斂することを示そう．そのためには，円 $|z|=|a_\nu|$ を γ_ν とするとき，必要なら部分列を選んで，γ_ν の $\eta(z)$ による image が ν と共に P に収斂することを示せばよい．[9]．

a) P は $S_0^{(1)}$ にあるとする．P に於ける V の局所座標を z と v になるようにとり，その座標近傍の中に dicylinder $\Delta=(\Delta^1,\Delta^2)$: $|z|<\rho^1$, $|v|<\rho^2$ を描く．そして Δ^1 の点 z に対し，$\sigma_z=S_z\cap\Delta$ とし，σ_z における S_z の局所座標を v にとる．Δ 内で $v=0$ で与えられる直線を L とし，$L_z=L\cap S_z$ とする．次に δ 内に原点に収斂する任意の点 z_μ ($\mu=1,2,\cdots$) をとり，S_{z_μ} の universal covering space を $\tilde{S}_{z_\mu}$，$\tilde{S}_{z_\mu}$ の δ_{z_μ} 上の部分の connected component の1つを $\tilde{\delta}_{z_\mu}$，$\tilde{\delta}_{z_\mu}$ での $\tilde{S}_{z_\mu}$ の局所座標をまた v とし，$\tilde{\delta}_{z_\mu}$ の $v=0$ なる点を $\tilde{L}_{z_\mu}$ とする．ここで，$\tilde{S}_{z_\mu}$ を w 平面上の原点を中心とする円に等角写像する函数 φ_μ を作る．この函数は2つの條件

$$\varphi_\nu(\tilde{\sigma}_{z_\mu})=0\ ,\quad d\varphi_\nu(\tilde{\sigma}_{z_\mu})/dv=1$$

で一意的に定まる．この半径を r_μ とする．このとき，ある正の数 r_0 があって，

$$\lim r_\mu = r_0$$

となる．この r_0 は $\tilde{\mathfrak{S}}_0^{(1)}$ を同様の仕方で w 平面に等角写像したときの円の半径である．

b)．次に H を t 平面の領域 $R_e(t)<0$，ξ を H から $\mathfrak{D}'$ への analytic map $z=e^t$，ξ による V の pull-back を $\mathfrak{W}$ とする．$\mathfrak{W}$ の t 上の fiber をここでは T_t と書く．ξ による Δ および L の逆像をそれぞれ Δ^* および L^* と書く．Δ^* は $H\times\Delta^2$ と equivalent であるから，$\mathfrak{W}$ の Δ^* における局所座標を t と v とする．ところで $\mathfrak{W}$ は topological fiber space としては trivial である．したがって $\mathfrak{W}$ の universal covering space を $\tilde{\mathfrak{W}}$ とすると，$\tilde{\mathfrak{W}}$ の t 上の fiber は T_t の universal covering space $\tilde{T}_t$ になる．$\tilde{\mathfrak{W}}$ の丁お Δ^* の上にある部分の connected component の１つを $\tilde{\Delta}^*$ とし，$\tilde{\mathfrak{W}}$ の丁お L^* の上にある直線の全体を l_i $(i=0,1,2,\cdots)$，その内 $\tilde{\Delta}^*$ 内にあるものを l_0 とする．このとき Teichmüller space の理論より，$\tilde{\mathfrak{W}}$ 上の正則函数 Φ で，写像 $w=\Phi$ により，H の点 t に対して $\tilde{T}_t$ を w 平面の単葉な領域に写すものが存在する．しかもこの像領域は点 $W=0$ および $W=1$ を含まない．[10]．そこで $\alpha(t)=\Phi(l_0)$，$\beta(t)=\partial\Phi(l_0)/\partial v$ とし

$$\Phi^*=(\Phi-\alpha(t))/\beta(t)$$

とおく．

c)　a_ν $(\nu=1,2,\cdots)$ の ξ による逆像の内，領域：$-\pi<$

$I_m(t) \leqq \pi$ に含まれるものを α_ν とし，$d_\nu = -Re(\alpha_\nu)$ とする．そして Γ_ν を円：$|t-d_\nu| < \sqrt{d_\nu}$，$\widetilde{\Omega}_\nu$ を $\widetilde{\Omega}$ の Γ_ν 上の部分とし，写像 $\Phi_\nu^{(1)}$

$$\tau = (t-d_\nu)/\sqrt{d_\nu}, \quad w = \varphi^*$$

による $\widetilde{\Omega}_\nu$ の image を G_ν とする．τ 平面の単位円 $|\tau|<1$ を Δ と書くとき，G_ν は $\Delta \times C'$ の単葉な部分領域である．しかも Koebe の定理よりある正の数 k_0 が存在して，円 $|w| < k_0$ を Δ^* と書くとき，G_ν はすべて dicylinder $\Delta \times \Delta^*$ を含む．他方 $l_i \cap \widetilde{\Omega}_\nu$ $(i=0,1,2,\cdots)$ の Φ_ν による image $l_{i\nu}^*$ はすべて $w = f_{i\nu}(\tau)$ ($f_{i\nu}(\tau)$ は Δ で1価正則）と書け，しかも $\Delta \times C'$ 内の G_ν の境界は $l_{i\nu}^*$ 全体の導集合になっている．したがってそれは $w = F_{\iota\nu}(t)$ ($\iota \in I$, $F_{\iota\nu}(t)$ は Δ で1価正則な函数）なる型の解析面で構成されている．また領域の列 G_ν $(\nu=1,2,\cdots)$ は，必要なら部分列をとって，ある領域 G_0 に収斂する．この G_0 は Δ をある w 平面の領域 J_0 との直積 $\Delta \times J_0$ であり，J_0 は $\widetilde{S}_0^{(1)}$ の image である．したがってそれは全平面ではない．写像 $\Phi_\nu^{(1)}$ による $\widetilde{\Delta}^* \cap \widetilde{\Omega}_\nu$ の像を G_ν^* とし，また $\beta_\nu = (\alpha_\nu - d_\nu)/\sqrt{d_\nu}$ としておく．

d) 各 G_ν に対し，$\Delta \times C'$ 内の G_ν の境界に含まれる2つの解析面を与える函数 $F_{1\nu}(t)$ および $F_{2\nu}(t)$ $(\nu=1,2,\cdots)$ を適当に選び，必要ならば再び部分列をとって，その2つの函数列

がそれぞれ異なる定数 F_{10} および F_{20} に収斂するようにする．つぎに $\lambda(w)$ を単位円内の elliptic modular function の導函数とし，函数

$$\Delta(\tau, w) = \lambda((w - F_{1\nu}(t))/(F_{2\nu}(t) - F_{1\nu}(t)))$$

を考える．そして写像 $\Phi_\nu^{(2)}$: $\tau' = \tau$，$w' = \delta_\nu(\tau, w)$ による G_ν の image を G_ν^* とする．G_ν^* はすべて単位 dicylinder $\Sigma' \times \Sigma''$: $|\tau'| < 1$，$|w'| < 1$ 内の単葉な領域である．このとき，函数 δ_ν の branch を適当に選んで，領域の列 G_ν^* $(\nu = 1, 2, \cdots)$ は $\Sigma' \times \Sigma''$ の内部の領域 G_0^* に収斂するようにしておく．そうすると $\mathfrak{g}_\nu$ の $\Phi_\nu^{(2)}$ による image $\mathfrak{g}_\nu^*$ の列もまたある領域 $\mathfrak{g}_0^*$ に収斂する．このとき G_0^* も $\mathfrak{g}_0^*$ も直積領域である．これを $\Sigma' \times T_0^*$，および $\Sigma' \times \tau_0^*$ と書く．

e)　以上で準備はできた．ここで δ 上に最初に与えた V の analytic section $\eta(z)$ より自然に定義される G_ν^* の Σ' 上の analytic section を考える．

先ず ν が十分大きければ，$\xi(\Gamma_\nu)$ は δ に含まれるから，すべての ν に対して $\xi(\Gamma_\nu) \subset \delta$ と仮定しておく．また $\eta(a_\nu)$ は P に収斂するから，同様にすべての ν に対して $\eta(a_\nu) \in \Delta$ と仮定しておく．そうすると $\eta(z)$ の定義する Σ' 上の G_ν^* の analytic section であって，β_ν の image が $\mathfrak{g}_\nu^*$ に入るものが一意的に定まる．これを $\eta_\nu^*(\tau')$ とすると，これは Σ' に

於ける1価正則な函数である．そして値の列 $\eta_\nu^*(\acute{p}_\nu)$ ($\nu=1,2,\cdots$) は τ_0^* の点に収斂する．ところで円 $\gamma_\nu : z=|a_\nu|e^{i\theta}$，($-\pi<\theta<2\pi$) に対して τ' 外で線分 $\gamma_\nu^* : Re(\tau')=0$ ，$-\pi/\sqrt{\alpha_\nu}<Im(\tau')\leqq\pi/\sqrt{\alpha_\nu}$ を考える．この線分の長さは0に tend する．そうすると Schwarz の定理より η_ν^* による γ_ν^* の image の長さもまた0に tend する．このことは γ_ν の η による image が P に tend することを示している．よってこの定理は証明できた．

以上により，我々は次の定理を得た．

Theorem　Class (A) の函数はすべて多項式に帰着する．

以上

参考文献

(1) T.Nishino; Nouvelles recherches sur les fonctions entiéresde plusieurs variables complexes.(IV) Types de surfaces premiées. J. Math. Kyoto Univ. 13(2), (1973) 217-272.

(2) K.Kodaira; Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds. Diff. Geo. (1971) 33-46.

(3) J.A.Morrow; Compactification of $\mathbb{C}^2$. Bull. Amer. Math. Soc. 78(5), (1972) 813-816.

(4) K.Kodaira; On compact analytic surfaces II. Ann. of Math. 77(3), (1963) 563-626.

(5) P.A.Griffiths; Seminar on degeneration of algebric varieties. Inst. for Advanced Study, Prinseton. 1967-1970.

(6) S.Kobayashi and T.Ochiai; Stable compactification and the great Picard theorem. J. Math. Soc. Japan 23(2), (1971) 340-350.

(7) P.Deling and D.Munford; The irreducibility of the space of curves of given genus. I.H.E.S. No.36, Paris (1969) 75-110.

(8) ?

(9) H.Grauert and H.Reckziegel; Hermitesche Metriken und normale Familien holomorpher Abbildungen. Math. Z. 89, (1965) 108-125.

(10) L.V.Ahlfors; Lectures on quasiconformal mappings. (1966) Van Nostrand.